Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Επιστήμη και Τεχνολογία των Υπολογιστών

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τρίτη Ομάδα Ασκήσεων

ΛΙΒΑΘΙΝΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

libathin@ceid.upatras.gr

Α.Μ.: 403

(Άσκηση 3.4) Να δειχθεί ότι:

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = (N+1)(H_{N+1}-1)$$

Αρχικά αναπτύσσουμε το άθροισμα που υπάρχει στο αριστερό μέλος:

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = 1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{N}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = N\cdot 1+(N-1)\frac{1}{2}+(N-2)\frac{1}{3}+(N-3)\frac{1}{4}+...+(N-(N-1))\frac{1}{N} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = \underbrace{\left(N+N\frac{1}{2}+N\frac{1}{3}+...+N\frac{1}{N}\right)}_{A} - \underbrace{\left(1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+...+(N-1)\frac{1}{N}\right)}_{B} \Rightarrow$$

Παρατηρούμε ότι για την αριθμητική παράσταση Α ισχύει ότι:

$$A = N\cdot H_N$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε ξανά το άθροισμα ως:

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = NH_N - B \qquad (1)$$

Όμως για την αρμονική ακολουθία γνωρίζουμε πως ισχύει (προκύπτει εύκολα δι' επισκοπήσεως):

$$H_{N+1} = H_N + \frac{1}{N+1} \qquad (2)$$

(1),(2) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} H_k = NH_{N+1} - N\frac{1}{N+1} - B$ (3)

Από την τελευταία σχέση μπορούμε κατόπιν να ξαναγράψουμε το άθροισμα ως:

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = NH_{N+1} - \underbrace{\left(1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+...+(N-1)\frac{1}{N}+N\frac{1}{N+1}\right)}_{C} \qquad (4)$$

Στην αριθμητική παράσταση C παρατηρούμε κάθε ένας από τους όρους του αθροίσματος υπολείπεται κατά $\frac{1}{i}$ για να συμπληρώσει μια ακέραια μονάδα. Οπότε προσθέτοντας και αφαιρώντας στην σχέση (4) τον όρο $H_{N+1}-1$ παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = NH_{N+1} - \left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{N-1}{N}+\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{N}{N+1}+\frac{1}{N+1}\right)\right) + H_{N+1}-1$$

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = NH_{N+1} - N + H_{N+1} - 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{N} H_k = (N+1)(H_{N+1} - 1)$$

Οπότε καταλήξαμε στην ζητούμενη ισότητα και αποδείξαμε το ζητούμενο.

(Άσκηση 3.8) Να βρεθεί το $[z^N]$ για κάθε μια από τις ακόλουθες OGF's:

$$\frac{1}{1-z}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2 \qquad \left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^3$$

Χρησιμοποιήστε την σημειογραφία

$$H_N^{(2)} \equiv 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{N^2}$$

Για τους «γενικευμένους αρμονικούς αριθμούς» που εμφανίζονται στα αναπτύγματα.

Αυτό που μας ζητείται σε αυτή την άσκηση είναι να βρούμε τις ακολουθίες που κωδικοποιούν οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις. Μια παρατήρηση που θα μας βοηθήσει στην επίλυση της άσκησης είναι η ακόλουθη ισότητα:

$$\int_0^z \frac{1}{1-t}\ln\frac{1}{1-t}\,dt = \left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2 \qquad (1)$$

Υποερώτημα 1

Αρχικά χρησιμοποιούμε τη σχέση (1) για να υπολογίσουμε την ακολουθία που αντιστοιχεί στη γεννήτρια συνάρτηση $\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2$. Εφόσον γνωρίζουμε ότι η ακολουθία της $\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}$ είναι η h_n, τότε η $\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2$ θα έχει την $0, \frac{h_{n-1}}{n}$ όπου $n \geq 1$. Κατόπιν μπορούμε να θεωρήσουμε την $\frac{1}{1-z}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2$ ως τα μερικά αθροίσματα της $\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2$, οπότε θα αντιστοιχεί στην ακολουθία:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_{k-1}}{k} \qquad (2)$$

Αν αναπτύξουμε το άθροισμα της σχέσης (2) θα προκύψει η ακόλουθη παράσταση:

$0+$
$1+$
$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+$
$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+$
$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$
...
$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$

Σε αυτή την παράσταση έχουμε αναπτύξει το άθροισμα που αντιστοιχεί σε έναν όρο της ακολουθίας a_n έτσι ώστε σε κάθε γραμμή να υπάρχει ένα γινόμενο της μορφής $\frac{1}{k}h_k$. Παρατηρούμε πως σε κάθε γραμμή η ποσότητα $\frac{1}{i}$ που υπάρχει έξω από την παρένθεση με την αντίστοιχη που υπάρχει μέσα στην παρένθεση στο τέλος του αθροίσματος, μπορούν να συνδυαστούν και να μας δώσουν την ισοδύναμη έκφραση:

$h_k^{(2)}+$
$\frac{1}{2}(1)$
$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+$
$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+$
...
$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}\right)$

Οπότε μπορούμε να ξαναγράψουμε το a_n ως:

$$a_n = h_n^{(2)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} h_{k-1} \qquad (3)$$

Προφανώς η σχέση (3) είναι ισοδύναμη της (2).

Υποερώτημα 2

Μπορούμε να κατασκευάσουμε το $\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^3$ ως γινόμενο των $\ln\frac{1}{1-z}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2$. Γνωρίζουμε πως

$$\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\quad\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_{n-1}}{n}z^n$$

Βάση του κανόνα της συνέλιξης μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^3=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n-k}\frac{h_{k-1}}{k}z^n$$

Οπότε καταλήγουμε στην επόμενη ακολουθία:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\frac{h_{k-1}}{k} \qquad (4)$$

(Άσκηση 3.11) Να βρεθεί το $N![z^N]A(z)$ για κάθε μια από τις ακόλουθες EGF:

$$A(z)=\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}, \qquad A(z)=\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2, \qquad A(z)=e^{z+z^2}$$

Το ζητούμενο σε αυτή την άσκηση είναι η εύρεση της αρχικής ακολουθίας από την δεδομένη γεννήτρια συνάρτηση. Επίσης θα πρέπει να προσέξουμε ότι πρόκειται για **εκθετικές** γεννήτριες συναρτήσεις, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες 3.3 και 3.4 του βιβλίου.

Υποερώτημα 1

Από τον πίνακα 3.3 γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0}n!\frac{z^n}{n!} \qquad (1)$$

Επίσης γνωρίζουμε πως:

$$\int_0^z\frac{1}{1-t}dt=\ln\frac{1}{1-z} \qquad (2)$$

Οπότε αναμένουμε να ισχύει η ακόλουθη σχέση (κανόνας ολοκλήρωσης)

$$\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 1}(n-1)!\frac{z^n}{n!} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) φαίνεται ότι η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση σχηματίζεται από το γινόμενο των επιμέρους γεννητριών. Αναμένουμε επομένως η αντίστοιχη ακολουθία να αποτελεί την συνέλιξη των αρχικών ακολουθιών σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!\right)\frac{z^n}{n!} \qquad (4)$$

Απλοποιώντας τα αθροίσματα της σχέσης (4) έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(k-1)!(n-k)!\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k}\right)\frac{z^n}{n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\frac{z^n}{n!}$$

Χρησιμοποιώντας την αρμονική ακολουθία $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n!H_n\frac{z^n}{n!} \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι η ακολουθία της γεννήτριας συνάρτησης $\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}$ είναι η $n!H_n$.

Υποερώτημα 2

Παρατηρούμε πως ισχύει:

$$\int_0^z \frac{1}{1-t}\ln\frac{1}{1-t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2 \Rightarrow \left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2 = 2\int\frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}\,dz \qquad (6)$$

Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα τους προηγούμενου υποερωτήματος και τον κανόνα της ολοκλήρωσης ώστε να βρούμε την ακολουθία:

$$\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-1)!H_{n-1}\frac{z^n}{n!} \qquad (7)$$

Από τη σχέση (7) προκύπτει άμεσα ότι η ακολουθία της γεννήτριας συνάρτησης $\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2$ είναι η $2(n-1)!H_{n-1}$.

Υποερώτημα 3

Προκειμένου να υπολογίσουμε την ακολουθία που κωδικοποιείται από την γεννήτρια συνάρτηση

$$A(z) = e^{z+z^2} = e^z e^{z^2}$$

Παρατηρούμε ότι αρκεί να βρούμε την ακολουθία που αντιστοιχεί στην $X(z) = e^{z^2}$ και να την συνελίξουμε με την e^z.

Εξ' ορισμού ισχύει ότι:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (8)$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (8) του z με z^2 έχουμε:

$$e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{n!} + \ldots \Rightarrow$$

$$e^{z^2} = 1 + 0z + (2\cdot 1)\frac{z^2}{2!} + 0\frac{z^3}{3!} + (4\cdot 3)\frac{z^4}{4!} + 0\frac{z^5}{5!} + (5\cdot 4\cdot 3)\frac{z^6}{6!} + 0\frac{z^7}{7!} + (8\cdot 7\cdot 6\cdot 5)\frac{z^8}{8!} + \ldots$$

$$\ldots + 0\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \prod_{i=0}^{n/2}(n-i)\frac{z^{2n}}{n!} + \ldots \qquad (9)$$

Από την σχέση (9) παρατηρούμε ότι το e^{z^2} μηδενίζει όλους τους περιττούς όρους του e^z και πολλαπλασιάζει τους άρτιους με το γινόμενο $\prod_{i=0}^{n/2}(n-i)$. Επομένως μπορούμε να γενικεύσουμε και να καταλήξουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα για την ακολουθία που κωδικοποιείται από την e^{z^2} :

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\prod_{i=0}^{n/2}(n-i)\right)\frac{z^n}{n!} \quad \Rightarrow \; x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}\prod_{i=0}^{n/2}(n-i) \qquad (10)$$

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίζουμε την ζητούμενη ακολουθία συνελίσσοντας την (10) με το e^z, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$e^z e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1+(-1)^n}{2}\prod_{i=0}^{n/2}(n-i)\right)\frac{z^n}{n!}$$

Και επομένως η ακολουθία που αντιστοιχεί στην γεννήτρια συνάρτηση $A(z) = e^{z+z^2}$ είναι η:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1+(-1)^n}{2}\prod_{i=0}^{n/2}(n-i)$$

(Άσκηση 3.34) Να δειχθεί ότι:

$$\sum_{k=0}^{t}\binom{t-k}{r}\binom{k}{s} = \binom{t+1}{r+s+1}$$

Αρχικά θα μετασχηματίσουμε την ποσότητα $\sum_{k=0}^{t}\binom{t-k}{r}\binom{k}{s}$ (μορφή Α) στην ισοδύναμη μορφή της $\sum_{k=0}^{t}\binom{k}{r+s}$ (μορφή Β). Η μορφή Β μετράει όλους τους τρόπους που μπορούμε να επιλέξουμε r+s αντικείμενα από ένα πλήθος συνόλων που το κάθε σύνολο έχει μέγεθος k, με το k να κυμαίνεται μεταξύ 0 και t. Η μορφή A απλώς μετράει τους τρόπους σε δύο σύνολα την κάθε φορά, το ένα μεγέθους k και το άλλο μεγέθους t-k επιλέγοντας από το πρώτο s αντικείμενα και από το δεύτερο r. Είναι ενδιαφέρον ότι εφόσον στη μορφή A κάθε φορά μετράμε τους τρόπους για δύο σύνολα θα έχουμε εξετάσει δύο φορές το κάθε σύνολο, μία φορά για την επιλογή των r αντικειμένων και μια για την επιλογή των s αντικειμένων.

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{t}\binom{k}{r+s}=\binom{t+1}{r+s+1} \qquad (1)$$

Για να αποδείξουμε τη σχέση (1) αρκεί να δείξουμε ότι οι ακολουθίες:

$a_w=\sum_{k=0}^{t}\binom{k}{w}$ και $b_w=\binom{t+1}{w+1}$, όπου w=r+s

έχουν ίσες τις αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις τους A(z) και B(z).

$$A(z)=\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{t}\binom{k}{w}z^w=\sum_{k=0}^{t}\sum_{w=0}^{\infty}\binom{k}{w}z^w=\sum_{k=0}^{t}(1+z)^k \qquad (2)$$

Παρατηρούμε πως η σχέση (2) μπορεί να ερμηνευθεί ως άθροισμα t+1 όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο (1+z). Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$A(z)=\frac{(1+z)^{t+1}-1}{(1+z)-1}=\frac{(1+z)^{t+1}-1}{z} \qquad (3)$$

Επίσης για την B(z) θα ισχύει ότι:

$$B(z)=\sum_{w=0}^{\infty}\binom{t+1}{w+1}z^w=z^{-1}\sum_{w=0}^{\infty}\binom{t+1}{w+1}z^{w+1}=z^{-1}\sum_{w=1}^{\infty}\binom{t+1}{w}z^w=\frac{(1+z)^{t+1}-1}{z} \qquad (4)$$

Επομένως από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι όντως οι γεννήτριες συναρτήσεις είναι ίδιες, επομένως και οι αρχικές ακολουθίες είναι ίδιες και η σχέση αποδείχθηκε.

(Άσκηση 3.58) Να δειχθεί ότι:

$$\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)...$$

Δώστε μια κλειστή μορφή για τους πρώτους t όρους του γινομένου. Αυτή η ταυτότητα ονομάζεται μερικές φορές «η ταυτότητα του επιστήμονα των υπολογιστών». Γιατί;

Γνωρίζουμε πως ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4+... \qquad (1)$$

Μπορούμε να μοιράσουμε τις δυνάμεις που βρίσκονται στο δεξιό μέλος σε αυτές που έχουν άρτιο και σε αυτές που έχουν περιττό εκθέτη ως ακολούθως:

$$\frac{1}{1-z} = (1+z)\underbrace{(z^0+z^2+z^4+z^6+...)}_{A} \qquad (2)$$

Για την ποσότητα Α μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $y=z^2$ και να την ξαναγράψουμε ως ακολούθως:

$$A= y^0+y^1+y^2+y^3+y^4+... \qquad (3)$$

Παρατηρούμε όμως ότι το δεξιό μέλος της σχέσης (3) είναι ίδιο με αυτό της σχέσης (1), οπότε μπορούμε και για το Α να καταλήξουμε σε μια ισότητα παρόμοια με αυτή της σχέσης (2):

$$A= (1+y)\underbrace{(y^0+y^2+y^4+y^6+...)}_{B}$$

Αντικαθιστώντας το y με z^2 και κατόπιν το Α στη σχέση (2) έχουμε:

$$\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z^2)B \qquad (4)$$

Προφανώς αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί εσαεί αντιμετωπίζοντας κάθε φορά την παράσταση τύπου Β που προκύπτει, όπως και την παράσταση τύπου Α. Επειδή κάθε φορά ο υπολογισμός της παράστασης τύπου Α θα απαιτεί μια αντικατάσταση τύπου $y=z^2$, αναμένουμε οι εκθέτες των z στην σχέση (4) να αποτελούν διαδοχικές δυνάμεις του 2. Έτσι καταλήγουμε στην ζητούμενη ισότητα:

$$\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)... = \prod_{k\geq 0}(1+z^{2^k}) \qquad (5)$$

Στη συνέχεια προκειμένου να βρούμε μια κλειστή μορφή για τους πρώτους t όρους του γινομένου ακολουθούμε μια αντίστροφη διαδικασία και προσπαθούμε από το γινόμενο $\prod_{k\geq 0}(1+z^{2^k})$ να ανακτήσουμε την αρχική δυναμοσειρά που περιγράφει η σχέση (1). Προκύπτει εύκολα ότι αν πάρουμε τους όρους του γινομένου από k=0 έως k=t-1 (συνολικά t όροι), τότε θα έχουμε πάρει τους όρους της δυναμοσειράς από z^0 έως z^{2^t-1}. Οπότε ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\prod_{k=0}^{t-1}(1+z^{2^k}) = \sum_{n=0}^{2^t-1} z^n \qquad (6)$$

Το άθροισμα στο δεξιό μέλος αποτελεί πεπερασμένο άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο z, επομένως μπορούμε να το υπολογίσουμε άμεσα:

$$\prod_{k=0}^{t-1}(1+z^{2^k}) = \sum_{n=0}^{2^t-1} z^n = \frac{z^{2^t}-1}{z-1} \qquad (7)$$

Η σχέση (7) αποτελεί την απάντηση στο δεύτερο σκέλος της άσκησης.

Όσον αφορά το τελευταίο σκέλος της άσκησης, θεωρούμε μια τυχαία ακολουθία από bits απείρου μήκους. Σε κάθε θέση της ακολουθίας το αντίστοιχο bit μπορεί να λάβει την τιμή 0 ή 1 (δηλαδή να υπάρχει ή να μην υπάρχει). Επιπλέον αν θεωρήσουμε την θέση k, τότε το bit της θέσης έχει βάρος 2^k. Με αυτά υπόψη μπορούμε να κωδικοποιήσουμε το bit της θέσης k με τον όρο $\left(1+1\cdot z^{2^k}\right)$, με την έννοια ότι το 1 σημαίνει απουσία του bit (κατάσταση 0) και το $1\cdot z^{2^k}$ σημαίνει παρουσία του bit (κατάσταση 1) με βάρος z^{2^k} (λόγω της θέσης του). Οι όροι όμως που προαναφέραμε ισχύουν για κάθε bit της ακολουθίας, οπότε συνολικά (για όλα τα bits) θα ισχύει η σχέση:

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\ldots = \prod_{k\geq 0}(1+z^{2^k}) \qquad (8)$$

Φαίνεται λοιπόν ξεκάθαρα πως η σχέση (8) αποτελεί την υπο εξέταση σχέση (5). Οπότε ο χαρακτηρισμός της σχέσης (5) ως «η ταυτότητα του επιστήμονα των υπολογιστών» έχει ισχύ, εφόσον γνωρίζουμε πως τα πάντα σε έναν υπολογιστή είναι σειρές από bits!