ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΛΙΒΑΘΙΝΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

LIBATHIN@CEID.UPATRAS.GR

Επιστήμη και Τεχνολογία των Υπολογιστών Α.Μ.: 403

Δεύτερη Ομάδα Ασκήσεων

1. Να βρεθεί μια έκφραση για το:

$$\left[z^n\right]\frac{1}{\sqrt{1-z}}\ln\frac{1}{1-z}$$

(Υπόδειξη: Αναπτύξτε το $(1-z)^{-a}$ και παραγωγίστε ως προς a).

Προκειμένου να αναπτύξουμε την ποσότητα $(1-z)^{-a}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Taylor (Maclaurin). Αρχικά υπολογίζουμε τη ν-οστή παράγωγο:

$$\frac{d(1-z)^{-a}}{dz}=a(1-z)^{-(a+1)},$$

$$\frac{d^2(1-z)^{-a}}{dz^2}=a(a+1)(1-z)^{-(a+2)},$$

…,

$$\frac{d^n(1-z)^{-a}}{dz^n}=a(a+1)(a+2)...(a+n-1)(1-z)^{-(a+n)}$$

Αν θέσουμε $f(z)=(1-z)^{-a}$, τότε γνωρίζουμε πως:

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+...$$

Επομένως:

$$f(z)=1+az+\frac{a(a+1)}{2!}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{3!}z^3+\dots$$

Παρατηρούμε πως για την ποσότητα $\frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)}{k!}$ ισχύουν:

$$\frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)}{k!}=\frac{(a+k-1)!}{(a-1)!k!}=\binom{a+k-1}{k}$$

Οπότε μπορούμε να καταλήξουμε στην ισοδύναμη έκφραση:

$$(1-z)^{-a}=1+\sum_{k\geq1}\binom{a+k-1}{k}z^k \qquad (1)$$

Ακολουθώντας την υπόδειξη της άσκησης παραγωγίζουμε την εξίσωση (1) ως προς α, οπότε έχουμε:

$$\frac{d(1-z)^{-a}}{da}=\frac{1}{(1-z)^a}\ln\frac{1}{1-z}$$

Στη συνέχεια θέλουμε να βρούμε την παράγωγο ως προς α της ποσότητας $\frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)}{k!}$:

$$\frac{d}{da}\left(\frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)}{k!}\right)=$$
$$\frac{1}{k!}\big((a+1)(a+2)...+a(a+2)(a+3)...+a(a+1)(a+3)...+...+a(a+1)...(a+k-2)\big)$$

Οπότε μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε:

$$\frac{d}{da}\left(\frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)}{k!}\right)=\frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a+i}=\binom{a+k-1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a+i}$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\frac{1}{(1-z)^a}\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{k\geq 1}\binom{a+k-1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a+i}\right)z^k \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη σχέση $\frac{1}{\sqrt{1-z}}\ln\frac{1}{1-z}$ προκύπτει από την (2) αν θέσουμε α=1/2. Οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}}\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{k\geq 1}\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\cdot\frac{2k-1}{2}}{k!}\left(2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}\right)z^k$$

Απομονώνοντας την ποσότητα $\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\cdot\frac{2k-1}{2}}{k!}2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}$, έχουμε:

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot\cdot\frac{2k-1}{2}}{k!}2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k-1)}{2^k k!}2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}=\frac{2^k k!}{2^k k!}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k-1)}{2^k k!}2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}=$$
$$\frac{(2k)!}{2^k 2^k k!k!}2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}=\frac{2}{4^k}\binom{2k}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}$$

Οπότε τελικά καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}}\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{k\geq 1}\frac{2}{4^k}\binom{2k}{k}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}\right)z^k \qquad (3)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα ότι:

$$\left[z^n\right]\frac{1}{\sqrt{1-z}}\ln\frac{1}{1-z}=\frac{2}{4^k}\binom{2k}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{1+2i}$$

<u>Σημείωση</u>: Είναι ενδιαφέρον ότι στην ίδια σχέση θα καταλήξουμε αν αντί να αναπτύξουμε την ποσότητα $\left(1-z\right)^{-a}$ με το θεώρημα Taylor, εφαρμόσουμε σε αυτήν τον γνωστό τύπο του Νεύτωνα $(1-z)^{-a}=\sum_{k\geq 0}\binom{-a}{k}(-1)^k z^k$.

2. Να δειχθεί ότι:

$$\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2N-2k}{N-k} = 4^N$$

Παρατηρούμε πως το ζητούμενο άθροισμα $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2(N-k)}{N-k}$ αποτελεί την συνέλιξη της ακολουθίας $\binom{2k}{k}$ με τον εαυτό της. Από τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων γνωρίζουμε πως η συνέλιξη δύο ακολουθιών αντιστοιχεί με πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων γεννητριών συναρτήσεων. Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\binom{2k}{k}$. Χρησιμοποιώντας μερικά συμπεράσματα από την λύση της προηγούμενης άσκησης μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της $\binom{2k}{k}$ είναι η $\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} = (1-4z)^{-1/2} = \sum_k \binom{-1/2}{k}(-4)^k z^k = \sum_k \frac{\frac{-1}{2}(\frac{-1}{2}-1)(\frac{-1}{2}-2)...(\frac{-1}{2}-k+1)}{k!}(-4)^k z^k =$$

$$\sum_k \frac{(-1)^k \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}..\frac{2k-1}{2}}{k!}(-4)^k z^k = \sum_k \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}..\frac{2k-1}{2}}{k!}4^k z^k = \sum_k \frac{1\cdot 3\cdot 5...\cdot(2k-1)}{2^k k!}4^k z^k =$$

$$\sum_k \frac{2^k k!}{2^k k!}\frac{1\cdot 3\cdot 5...\cdot(2k-1)}{2^k k!}4^k z^k = \sum_k \frac{(2k)!}{2^k 2^k k!k!}4^k z^k = \sum_k \frac{(2k)!}{k!k!}z^k = \sum_k \binom{2k}{k}z^k$$

Επομένως σύμφωνα με την συνέλιξη θα ισχύει ότι:

$$\sum_N \sum_k \binom{2k}{k}\binom{2(N-k)}{N-k}z^N = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4z}}\right)^2 = \frac{1}{1-4z} \qquad (1)$$

Όμως γνωρίζουμε (από τον πίνακα 3.1) ότι:

$$\frac{1}{1-4z} = \sum_N 4^N z^N \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση:

$$(1),(2) \Rightarrow \sum_k \binom{2k}{k}\binom{2(N-k)}{N-k} = 4^N$$

3. Να δειχθεί ότι η γεννήτρια συνάρτηση για το πλήθος των τρόπων να εκφράσουμε το N σαν ένα γραμμικό συνδυασμό δυνάμεων του 2 (με ακέραιους συντελεστές) είναι:

$$\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k}}$$

Για να λύσουμε αυτή την άσκηση χρησιμοποιούμε το παράδειγμα 3.54 του βιβλίου. Συμβολίζουμε λοιπόν με b0 τις δυνάμεις του 2 μηδενικού βαθμού, με b1 πρώτου, με b2 δευτέρου κ.ό.κ. Θέτω έναν απαριθμητή για το πλήθος εμφάνισης κάθε δύναμης του 2:

$$C(z)=\sum_{b0,b1,b2,b3...} z^{b0+2b1+2^2b2+2^3b3+...} \qquad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που εμφανίζεται ένα 2^0 προσθέτω 1 στο άθροισμα, κάθε φορά που εμφανίζεται ένα 2^1 προσθέτω 2 στο άθροισμα … κάθε φορά που εμφανίζεται ένα 2^n προσθέτω 2^n στο άθροισμα κ.ό.κ. Ωστόσο οι εμφανίσεις της κάθε δύναμης του 2 είναι ανεξάρτητες από τις εμφανίσεις των άλλων δυνάμεων, οπότε μπορώ να ξεχωρίσω το άθροισμα (1) για κάθε b_i:

$$C(z)=\sum_{b0} z^{b0}\sum_{b1} z^{2b1}\sum_{b2} z^{2^2b2}\sum_{b3} z^{2^3b3}...$$

Έτσι προκύπτει ένα γινόμενο γνωστών γεννητριών συναρτήσεων που καταλήγουν στο:

$$C(z)=\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z^2}\frac{1}{1-z^{2^2}}\frac{1}{1-z^{2^3}}\frac{1}{1-z^{2^4}}...=\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k}}$$

Οπότε και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

4. Ορίζουμε το B ως την συλλογή όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του A. Αν A(z) και B(z) είναι οι OGF των A και B, να δειχθεί ότι:

$$B(z)=\prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{A_n}=e^{\left(A(z)-\frac{1}{2}A(z^2)+\frac{1}{3}A(z^3)-...\right)}$$

Προκειμένου να βρούμε όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα B του συνόλου A, αρχίζουμε να δημιουργούμε υποσύνολα από το A με αντικείμενα δεδομένου μεγέθους. Δηλαδή πρώτα σχηματίζουμε όλα τα υποσύνολα αποτελούμενα από αντικείμενα μεγέθους 1, κατόπιν από αντικείμενα μεγέθους 2, κ.ό.κ. Έστω ότι θέλουμε να σχηματίσουμε υποσύνολα με αντικείμενα μεγέθους n. Για καθένα από αυτά έχω δύο δυνατότητες, είτε να το συμπεριλάβω στο υποσύνολό μου είτε όχι. Επομένως η (συμβολικά σχηματιζόμενη) γεννήτρια συνάρτηση για το B είναι η:

$B(z)=(1+z^1)^{A_1}(1+z^2)^{A_2}(1+z^3)^{A_3}...$ (1) (η ποσότητα A_i ορίζει το πλήθος των αντικειμένων στο σύνολο A που έχουν μέγεθος i).

Κάθε όρος του γινομένου έχει τη μορφή $(1+z^n)^{A_n}$. Το 1 αναπαριστά την επιλογή να μην επιλέξουμε καθόλου το συγκεκριμένο αντικείμενο ενώ το z^n την επιλογή να το επιλέξουμε. Το γεγονός ότι ο εκθέτης του z είναι n, δείχνει ότι το μέγεθος του αντικειμένου είναι n. Τέλος εφόσον έχουμε A_n αντικείμενα μεγέθους n, θα πρέπει να πάρουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς που ορίζονται από το γινόμενο $\underbrace{(1+z^n)(1+z^n)...(1+z^n)}_{A_n}=(1+z^n)^{A_n}$. Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει άμεσα η πρώτη ισότητα της προς απόδειξη σχέσης:

$$B(z)=(1+z^1)^{A_1}(1+z^2)^{A_2}(1+z^3)^{A_3}...=\prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{A_n}. \qquad (2)$$

Είναι ενδιαφέρον ότι η σχέση (2) ισχύει και για n=0, εφόσον θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν αντικείμενα μηδενικού μεγέθους, δηλαδή A_0=0:

$$\prod_{n\geq 0}(1+z^n)^{A_n}=(1+z^0)^0\prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{A_n}=1\prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{A_n}$$

Επομένως δεν είναι λάθος να γράψουμε: $B(z)=\prod_{n\geq 0}(1+z^n)^{A_n}$.

Προκειμένου να αποδείξουμε και τη δεύτερη ισότητα εφαρμόζουμε ιδιότητες των λογαρίθμων. Έτσι έχουμε:

$$e^{\ln(B(z))}=B(z) \qquad (3)$$

$$\ln(B(z))=\ln\prod_{n\geq 0}(1+z^n)^{A_n}=\sum_{n\geq 0}\ln\left((1+z^n)^{A_n}\right)=\sum_{n\geq 0}A_n\ln\left(1+z^n\right) \qquad (4)$$

Απομονώνουμε την ποσότητα $\ln(1+z^n)$, οπότε έχουμε:

$$\ln(1+z^n)=-\ln\frac{1}{1-(-z^n)}$$

Από τον πίνακα 3.1 γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση (εναλλακτικά το υπολογίζουμε άμεσα από το θεώρημα Taylor):

$$\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}z^k$$

Άρα:

$$\ln(1+z^n)=-\ln\frac{1}{1-(-z^n)}=-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}(-z^n)^k=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}z^{nk} \qquad (5)$$

Εξ' ορισμού ισχύει ότι $A(z)=\sum_{n\geq 0}A_nz^n$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$$\ln(B(z))=\sum_{n\geq 0}A_n\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}z^{nk}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}\sum_{n\geq 0}A_n(z^k)^n=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}A(z^k)\Rightarrow$$

$$\ln(B(z))=A(z)-\frac{1}{2}A(z^2)+\frac{1}{3}A(z^3)-... \qquad (6)$$

Τελικά συνδυάζοντας τις σχέσεις (3) και (6) καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$B(z)=e^{\ln(B(z))}=e^{A(z)-\frac{1}{2}A(z^2)+\frac{1}{3}A(z^3)-...}$$